

MONOGRAFÍA
Bachillerato Internacional

Una nueva forma de definir una circunferencia.

Guillermo Marín Díaz-Guardamino
Colegio Gaztelueta

ÍNDICE

1. Introducción (pg. 3)

2. Teorema (pg. 3)

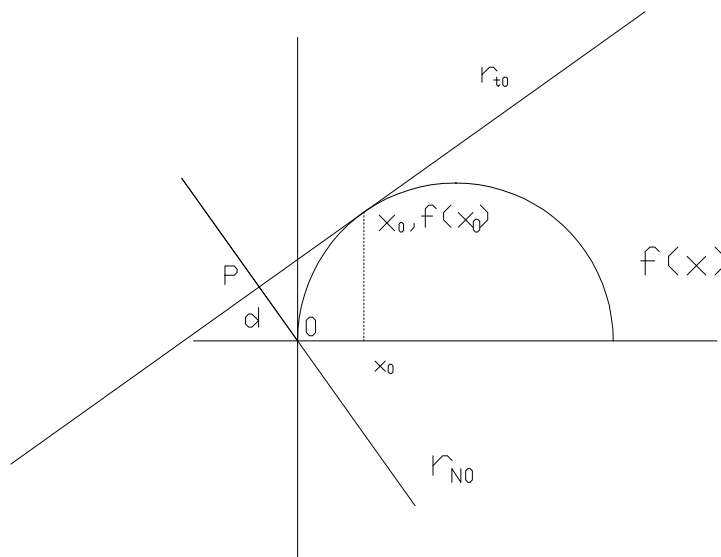
3. Observaciones (pg. 6)

4. Conclusión (pg. 9)

1. Introducción

En primer lugar, vamos a definir los elementos que se utilizarán en el desarrollo de la monografía.

Dada una curva $y = f(x)$, suponemos que r_{t_0} es la recta tangente en x_0 . La recta perpendicular a la recta r_{t_0} que pasa por el origen es r_{n_0} . Si llamamos d_0 a la distancia del origen O al punto de corte entre las dos rectas mencionadas, es decir $d_0 \equiv d(r_{t_0}, 0)$, esta distancia es la medida del segmento OP , siendo P el corte de $r_{n_0} \cap r_{t_0}$.



Habiendo establecido estas notaciones podemos enunciar el siguiente teorema:

2. Teorema:

Las funciones $y = f(x)$ que verifican que la distancia d_0 coincide con la abscisa x_0 son las circunferencias de ecuación:

$$\boxed{x^2 + y^2 = k \cdot x} \quad k > 0$$

Demostración:

La ecuación de la recta tangente a la curva en x_0 es

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

Teniendo la recta se haya la distancia de la recta tangente a 0, siendo 0 el origen de coordenadas. $r_t \equiv y'_0 x - y + y'_0 - y_0 \Rightarrow d_0 = d(0, r_t) = \frac{|y'_0 \cdot 0 + 0 + x_0 \cdot y'_0 - y_0|}{\sqrt{(y'_0)^2 + 1}}$

$$x_0 \cdot y'_0 - y_0 = x_0 \sqrt{(y'_0)^2 + 1} \Rightarrow x_0 = \frac{x_0 \cdot y'_0 - y_0}{\sqrt{(y'_0)^2 + 1}}$$

$$y'_0 - \frac{y_0}{x_0} = \sqrt{(y'_0)^2 + 1}$$

$$\left(y'_0 - \frac{y_0}{x_0} \right)^2 = (y'_0)^2 + 1$$

$$y'_0 + \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 - 2 \frac{y'_0 \cdot y_0}{x_0} = (y'_0)^2 + 1$$

$$-2 \cdot y'_0 \frac{y_0}{x_0} = 1 - \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2$$

$$2 \cdot y'_0 = \frac{x_0}{y_0} \left[\left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 - 1 \right]$$

$$y'_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{x_0}{y_0} \right)$$

Obtenemos la ecuación diferencial homogénea:

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

En esta ecuación están implícitas las funciones que verifican la propiedad del enunciado. Se trata de ver ahora, resolviendo la ecuación siguiente, qué tipo de funciones son.

La resolvemos por el método de resolución de una ecuación diferencial homogénea:

Realizamos el cambio de variables siguiente:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x$$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)$$

$$u' \cdot x = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \frac{1}{u} - u = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \frac{1}{u} = -\frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2} \frac{u^2 + 1}{u}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot u' \cdot u}{u^2 + 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = -\frac{1}{2} \ln x + c$$

$$\ln \sqrt{u^2 + 1} = \ln \frac{1}{\sqrt{x}} + c$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{x}} + c} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$u^2 + 1 = k \cdot \frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{k}{x}$$

$y^2 + x^2 = k \cdot x$ *Esta es la ecuación general de una familia de Circunferencias.*

3. Observaciones:

Observación 1.

Estas circunferencias tienen su centro en el punto $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{k}{2}$.

Demostración

$$y^2 + x^2 - k \cdot x = 0$$

$$y^2 + x^2 - k \cdot x + \frac{\sqrt{k}}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2} = 0$$

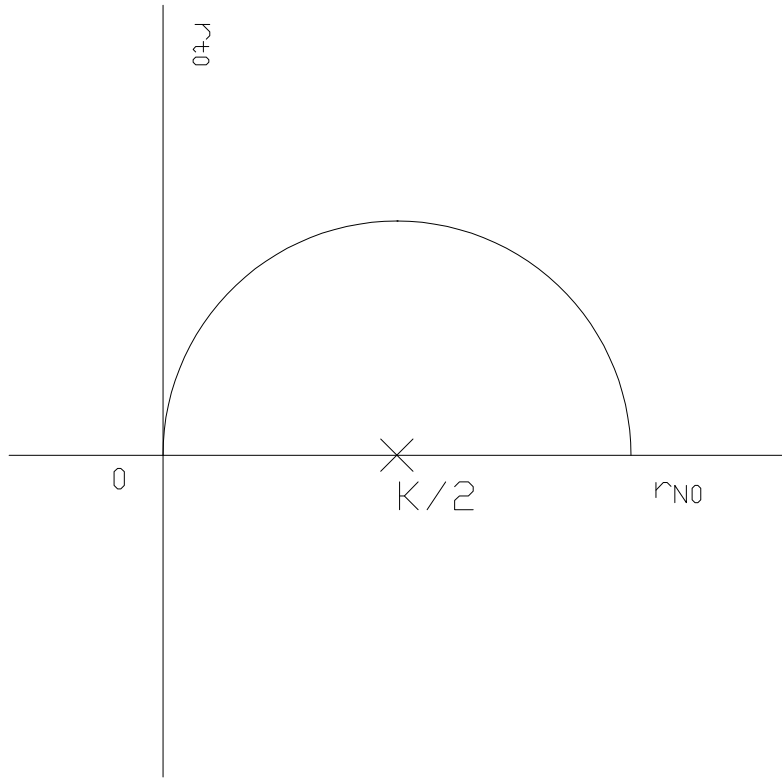
$$y^2 + \left(x - \frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{k}}{2} = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Observación 2.

Ilustramos las rectas r_{t_0} y r_{n_0} , para unos determinados valores de x_0 , que son especialmente aclaratorios.

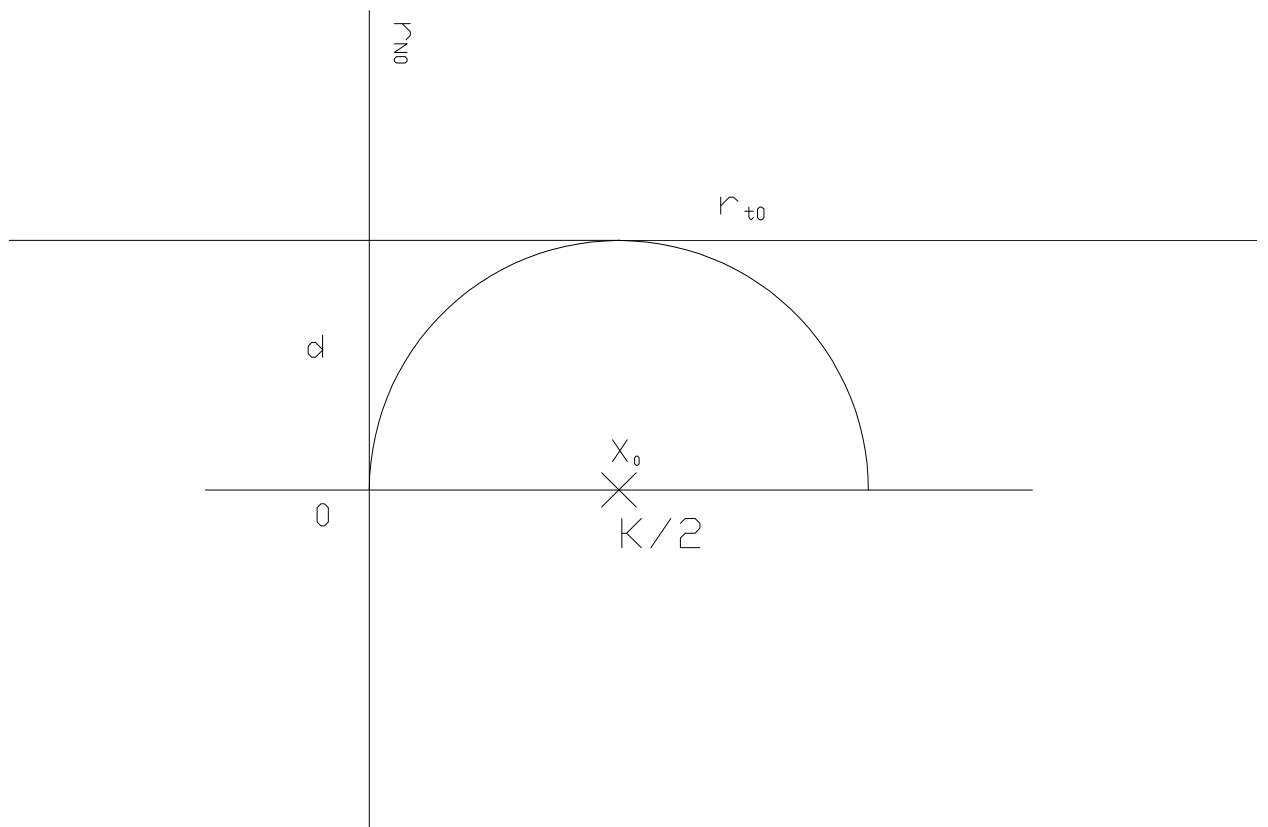
Cuando $x_0 = 0$

Vemos que r_{t_0} coincide con el eje de ordenadas y por lo tanto la distancia desde el origen 0 a esta recta, es cero.



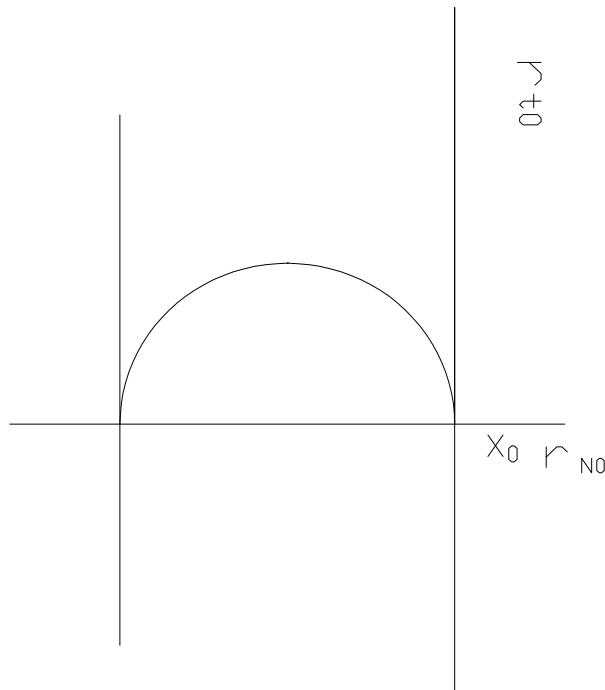
Cuando $x_0 = \frac{k}{2}$

En este caso r_{t_0} es paralela al eje de abscisas y la distancia desde esta hasta el origen 0 es $\frac{k}{2}$



Cuando $x_0 = k$

En el tercer caso la recta r_0 es paralela al eje de ordenadas y vemos que la distancia de esta al origen es k



4. Conclusión:

La circunferencia se define de una forma natural como el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$ del plano que equidistan de un centro $Q(a,b)$.

$C \equiv$ Circunferencia de radio r y centro $Q(a,b)$.

$$P(x,y) \in C \quad d(P,Q) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Con este trabajo hemos definido de una nueva forma la ecuación de una circunferencia. En efecto, una circunferencia es la curva que tiene por ecuación la que verifica las hipótesis del teorema enunciado en este trabajo.

Esta monografía está basada en el problema nº 171 del libro *“Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”*, Editorial MIR, escrito por A.Kiseliov, M.Krasnov, G.Makarenko. Dice así: *Hallar una curva que posea la propiedad de la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.*