

Trabajo de monografía:

“Los puntos de Lagrange y su utilidad astronómica”

Jaime Galaz de Miguel

Bachillerato Internacional
Colegio Gaztelueta

2008

ÍNDICE:

1 - INTRODUCCIÓN

- Vida de Lagrange**
- Puntos de Lagrange**
- Demostración matemática**

2 - DESARROLLO

- Asteroides Troyanos**
- Utilidad de los cinco puntos de Lagrange**

-Presente:

El SOHO
El WMAP

-Futuro:

En L3
En L4 y L5

3 – CONCLUSIÓN

4 - BIBLIOGRAFÍA

Hace unas semanas los alumnos de Bachillerato Internacional del Colegio Gaztelueta, Bilbao, fuimos a Toulouse a ver la “Cité de l’espace”. Allí nos hablaron sobre muchas cosas acerca de la ESA (European Space Agency), una de las cuales me pareció muy interesante. Fue la primera vez que oí hablar sobre el SOHO (Solar Heliospheric Observatory), y nos contaron que era reciente la colocación de este telescopio espacial. Me sorprendieron mucho las imágenes del sol, pero una de las cosas que más me llamó la atención fue la existencia de los Puntos de Lagrange. Los puntos de Lagrange son unos puntos en los que el matemático Joseph-Louis Lagrange dedujo que una masa allí colocada estaría en reposo en la cercanía de dos cuerpos mucho mayores que ella. Esto hizo que decidiera este tema para tratar en la presente monografía.

El objetivo de esta monografía es indicar qué son los puntos de Lagrange, cómo se demuestra su existencia, y para qué sirven estos puntos. En la actualidad la utilidad de los puntos de Lagrange es muy baja y apenas se han empezado a utilizar para el lanzamiento de satélites o telescopios. Aunque parece ser que ya empiezan a haber planes para, en un futuro cercano, lanzar al espacio telescopios que orbiten alrededor de estos puntos.

1 - INTRODUCCIÓN:

-Vida de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange nació en Sardinia-Piedmont, Turín el 25 de enero de 1736; y murió el 10 de abril de 1813 en París, Francia. Siendo muy joven leyó una obra del conocido astrónomo y matemático Edward Halley, y este despertó en él el gusto por las matemáticas. A los 16 años fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín. Y al cabo de muy poco tiempo lideró un grupo de científicos que pasaron a formar la Academia de Turín.

A los 19 años descubrió el problema isoperimétrico, que había estado más de medio siglo en las cabezas de los matemáticos sin estos poder llegar a una solución correcta. Gracias a esto entró en contacto con Leonard Euler, gran matemático de la época. También corrigió errores a grandes matemáticos como al propio Newton. En unos años se convirtió en el matemático más grande de su época.

Después de unos años, se dedicó a pensar sobre la filosofía, la metafísica y la religión, para después volver a dedicarse a las matemáticas y dejar para la prosperidad muchas obras de arte de álgebra y análisis.

Demostró el teorema de valor medio, desarrolló la mecánica lagrangiana y aportó considerablemente en la astronomía. Gracias a él se hizo la subdivisión decimal en las monedas. También halla la ecuación diferencial para el movimiento del sonido, y halla la solución de una cuerda que vibra transversalmente, cuya ecuación es $y = a \cdot \text{Sen}(mx) \cdot \text{Sen}(nt)$.

Habló también sobre la liberación de la Luna y de que por qué se ve siempre la misma cara desde la Tierra. Esto lo desarrolló gracias al trabajo virtual.

Por último, intentando resolver el Problema de los tres cuerpos, el cual resolvió en 1772, descubrió los Puntos de Lagrange. En ellos se han encontrado los asteroides troyanos y los satélites troyanos de Jupiter, de los que hablaré más adelante. También son los lugares en los que en la actualidad se sitúan algunos de los satélites y telescopios que se utilizan para el estudio del universo.

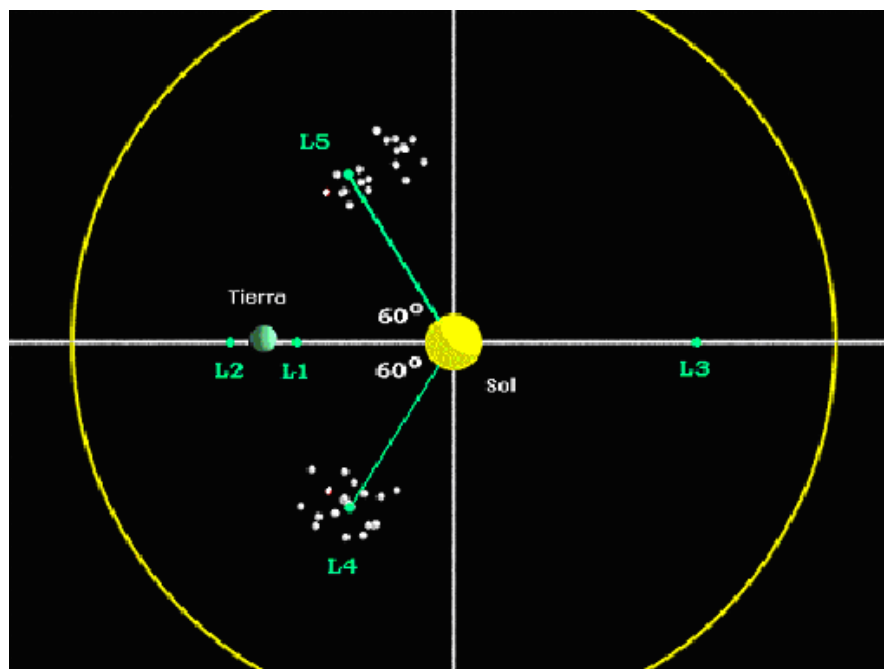
-Puntos de Lagrange

Los puntos de Lagrange los descubrió el propio Lagrange intentando resolver el Problema de los tres cuerpos. Son cinco puntos situados en la cercanía de dos masas grandes en los que la fuerza gravitatoria se equilibra con la fuerza centrípeta necesaria para rotar alrededor de la masa grande. Cualquier cuerpo de masa pequeña, en comparación con las dos masas, situado en uno de esos puntos se encuentra en reposo entre los campos gravitatorios de las dos masas.

FOTO

Los puntos de Lagrange son cinco puntos, de los cuales tres son inestables (L1, L2 y L3) y dos estables (L4 y L5), como explicaré más adelante. Esto significa que si se quiere colocar algún objeto en los puntos L1, L2 o L3 se deberán hacer algunas correcciones para que no se escape de su órbita. En cambio, si se colocara un satélite en los puntos L4 y L5 no haría falta su reajuste ya que estarían muy estables.

Los tres primeros están situados en la línea imaginaria que une el Sol y la Tierra, mientras que los otros dos se encuentran en la órbita de la Tierra alrededor del Sol cuando forman un ángulo de 60° con el eje Sol-Tierra.



Puntos de Lagrange en el sistema Sol-Tierra.

Se puede decir que ese cuerpo allí reposado puede permanecer un tiempo indefinido en dicho punto mientras se mueve a la vez que la Tierra gira alrededor del Sol.

Muchos de estos puntos son de gran utilidad ya que por ejemplo el punto L1 está siempre entre el Sol la Tierra y por tanto es el mejor sitio para situar un satélite para sacar información sobre el Sol, este es el caso del SOHO. Esto es porque no hay nunca nada que pueda tapar el Sol visto desde el satélite y por tanto puede estar incesantemente contemplándolo.

El punto L2 está situado en la misma línea que el L1, pero detrás de la Tierra. Por lo tanto, este es un lugar idóneo para la localización de un satélite que explore el espacio, ya que en ese punto no se ve perturbado por la luz solar. En este punto se encuentra la nave WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), que se dedica a observar el espacio profundo. Muy pronto tienen intención de situar en ese mismo punto el Planck Surveyor, otro telescopio que recogerá información sobre el fondo del universo.

El punto L3 se encuentra en la línea que une la Tierra con el Sol, pero detrás de este último. En este punto no hay colocado ningún satélite ni telescopio, como explicaré más adelante.

En los puntos L4 y L5 del sistema Sol-Tierra hay una gran cantidad de cuerpos que reposan tranquilamente además de mucho polvo espacial. Todo ello se desplaza a la vez que la Tierra gira alrededor del Sol, los cuerpos situados en el punto L4 precediéndole en su movimiento y los situados en el L5 siguiéndole.

-Demostración matemática:

La demostración matemática de la existencia de estos puntos es muy compleja, pero yo voy a intentar dar una breve explicación para que se pueda comprender lo que ocurre en esos puntos.

Vamos a desarrollar el problema de los tres cuerpos. En primer lugar debo decir que las soluciones que buscamos son las soluciones a las ecuaciones que mantienen una constante separación entre los tres cuerpos.

Así, la fuerza gravitatoria ejercida por M_1 y M_2 en la masa m es :

$$\vec{F} = -\frac{GM_1m}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2m}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2).$$

Como las posiciones de M_1 , M_2 y m dependen de \vec{r} , \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , que a su vez dependen del tiempo, la nueva ecuación pasa a ser en función del tiempo:

$$\vec{F}(t) = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}, \text{ donde } \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}.$$

Esta ecuación del movimiento nos da las posiciones relativas de los tres cuerpos, y son estas soluciones estacionarias las conocidas como puntos de Lagrange.

La manera más fácil de hallar las soluciones a este problema es fijar el eje de referencia en el cual las dos masas mayores estén fijas. Este nuevo eje de referencia tiene su origen en el centro de masas, y se mueve con una frecuencia angular Ω dada por la ley de Kepler:

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2). \text{ (R es la distancia entre las dos masas).}$$

La fuerza real en un esquema de referencia rotante con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ está relacionada con la fuerza inercial \vec{F} de la siguiente forma:

$$\vec{F}_\Omega = \vec{F} - 2m\left(\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Hay que hacer varias correcciones, la primera es la fuerza de Coriolis y la segunda es la fuerza inercial. La fuerza real puede derivarse del Potencial

$$U_\Omega = U - \vec{u} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \text{ por lo tanto}$$

$$\vec{F}_\Omega = -\nabla_{\vec{r}} U_\Omega + \frac{d}{dt} (\nabla_{\vec{u}} U_\Omega)$$

Los términos dependientes de la velocidad en el Potencial real no influyen en las posiciones de los puntos de equilibrio, pero son importantes para determinar la estabilidad dinámica del movimiento de los puntos de equilibrio.

El siguiente paso es hacer un caso de U_Ω en el que $\vec{v} = 0$, $M_1 = 10$, $M_2 = 1$ y $R = 10$. Así se consigue simplificar la ecuación y se hace una relación entre la masa M_1 y la masa M_2 .

Ahora las ecuaciones se complican muchísimo, pero después de desarrollarlas se llega a las soluciones de los puntos L1, L2 y L3:

$$\text{L1: } \left(R \left[1 - \left(\frac{\mathbf{a}}{3} \right)^{1/3} \right], 0 \right), \text{ L2: } \left(R \left[1 + \left(\frac{\mathbf{a}}{3} \right)^{1/3} \right], 0 \right), \text{ L3: } \left(-R \left[1 + \frac{5}{12} \mathbf{a} \right], 0 \right).$$

Para el sistema Sol-Tierra, $\mathbf{a} \approx 3 \times 10^{-6}$, $R = 1AU \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km}$. Los puntos L1 y L2 están situados a unos 1.5 millones de kilómetros de la Tierra, mientras que el punto L3 se encuentra detrás del Sol a una distancia parecida de la que se encuentra el L1 de la estrella.

Para hallar las soluciones a los puntos L4 y L5 hay que igualar la fuerza centrífuga, que actúa en una dirección radial al centro de masas, con la fuerza

gravitatoria ejercida por las dos masas M_1 y M_2 . Ahora también se vuelven a complicar las ecuaciones, pero después de unos cuantos pasos se llega a las siguientes soluciones:

$$L4: \left(\frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right), \frac{\sqrt{3}}{2} R \right), L5: \left(\frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right), -\frac{\sqrt{3}}{2} R \right)^1.$$

Una vez llegado a la conclusión de que el problema de los tres cuerpos tiene soluciones de puntos de equilibrio, ahora hay que hablar sobre la estabilidad de estos puntos. Para ello se utilizan unas fórmulas muy complicadas, de las que se llega a la conclusión de que los puntos L1 y L2 no son estables, y que un cuerpo allí situado tardaría 23 días en salirse de su posición de equilibrio. El punto L3 también es inestable, aunque en este punto un cuerpo tardaría unos 150 años en escaparse del equilibrio.

En cambio, los puntos L4 y L5 son muy estables, gracias en parte a la fuerza de Coriolis, que hace un efecto parecido al que ocurre en la formación de los huracanes. Esto se puede comprobar también si nos fijamos en los asteroides troyanos de Júpiter y en las rocas y polvo que hay en los puntos L4 y L5 del sistema Sol-Tierra. Como se ve los cuerpos que están situados en esos puntos no se escapan, por lo que podemos deducir, sin ecuaciones matemáticas, que esos puntos son muy estables.

Estas deducciones me servirán más adelante para hablar sobre la utilidad de los puntos de Lagrange, en los que, entre otras cosas, la estabilidad es una característica muy importante.

2 - DESARROLLO:

-Asteroides Troyanos

Los asteroides troyanos son muy importantes cuando se habla de los puntos de Lagrange ya que con aquellos asteroides descubiertos en Júpiter se ha demostrado, en parte, la existencia de esos puntos. En 1906, el astrónomo alemán Max Wolf descubrió la existencia de un asteroide cerca de Júpiter, asteroide 588, que le precedía en su movimiento alrededor del Sol, en un lugar de la órbita donde formaba un triángulo equilátero con Júpiter y el Sol. Este es el punto L4 de los puntos de Lagrange.

Poco después se descubrió otro asteroide, el asteroide 677, situado en la órbita de Júpiter, pero detrás de éste, en el punto L5. Más tarde se descubrieron cada vez más asteroides en la cercanía de estos dos, y se les empezaron a llamar con nombres de héroes de la guerra de Troya, como por ejemplo a 677 se le llamó Patroclo.

Estos cuerpos allí reposados giran alrededor de esos puntos con una órbita en forma de gota. Además, se sabe que los asteroides troyanos de Júpiter situados en el

¹ Las fórmulas y deducciones están sacadas de un trabajo en inglés hecho por Neil J. Cornish con la aportación de Jeremy Goodman, tomado de un enlace de Astroseti.org, (<http://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>). Para entender el razonamiento matemático pedí ayuda al profesor de matemáticas del colegio.

punto L4 son de mayor tamaño que los situados en el punto L5, incluso tres veces mayores, aunque no hay ninguna explicación clara para este hecho.

Poco a poco se fueron encontrando más y más asteroides alrededor de esos dos, por lo que se demostró que Lagrange tenía razón en lo referente a los puntos formados por dos masas de gran tamaño, en los que la fuerza gravitatoria se anula. Así, debido a los nombres puestos a esos asteroides, se llamó asteroides troyanos a todas las masas que aparecían en los puntos de L4 y L5 de los sistemas de dos masas de gran tamaño.

También se tiene sospecha de la existencia de objetos pequeños en los puntos de Lagrange de los sistemas con todos los planetas del Sistema Solar, así como en los sistemas formados por planetas de gran tamaño y alguno de sus satélites. Por ejemplo, los ya nombrados asteroides troyanos que se dan también, aparte de en Júpiter, en Saturno. Se sabe que los satélites Calypso y Telesco orbitan en un lugar muy próximo al de los puntos de Lagrange del sistema Saturno-Tethys.

-Utilidad de los cinco puntos de Lagrange

Presente

El SOHO:

En el presente la utilidad de estos puntos no es muy alta, tan sólo se aprecia la presencia del SOHO en el L1 y la nave WMAP en el L2, aunque en un futuro muy próximo se planea el lanzamiento de naves en el punto L2, como el Telescopio Espacial James Webb y el Planck Surveyor , además del SDO (Solar Dynamics Observatory).

El SOHO (Solar Heliospheric Observatory), es un satélite encargado de recopilar información sobre el Sol. Está situado en el punto L1 del sistema Sol-Tierra, a 1.5 millones de kilómetros de la Tierra, ya que así no puede ser eclipsado por ningún cuerpo y mantiene una visión incesante de nuestra estrella.

El SOHO forma parte de un programa conjunto entre la NASA y la ESA, el STPS (Solar-Terrestrial Science Programme), en el que los objetivos principales de la misión son:

- El estudio de la estructura y comportamiento del Sol usando técnicas heliosismológicas.
- El estudio de los procesos que forman y calientan la corona Solar.
- Investigación del viento solar y sus procesos de aceleración².

Gracias a él estamos en contacto en todo momento con el Sol y podemos detectar cualquier variación en la actividad solar. Esto nos permite hacer muchas investigaciones con respecto al Sol, y por tanto conocer cada vez algo más acerca de nuestra estrella. Este año se va a mandar al espacio otra nave para investigar nuestra estrella llamada SDO (Solar Dynamics Observatory) que junto con el SOHO nos dará

² SOHO, Descripción de la misión

http://www.upv.es/satelite/trabajos/Grupo2_99.00/misiones/soho/soho.html

muchísima información sobre el Sol, sobre todo acerca de las tormentas solares. De todos modos, este observatorio no se colocará en ninguno de los puntos de Lagrange sino que se encontrará en una órbita solar polar.

El SOHO emite las 24 horas del día, aunque hay unos periodos en los que se encuentra incomunicado con la Tierra. Desde Internet es posible ver las imágenes que manda a la NASA prácticamente en directo. De hecho, en algún momento ha chocado un cometa contra el Sol y muchas personas han visto las imágenes del impacto en directo.

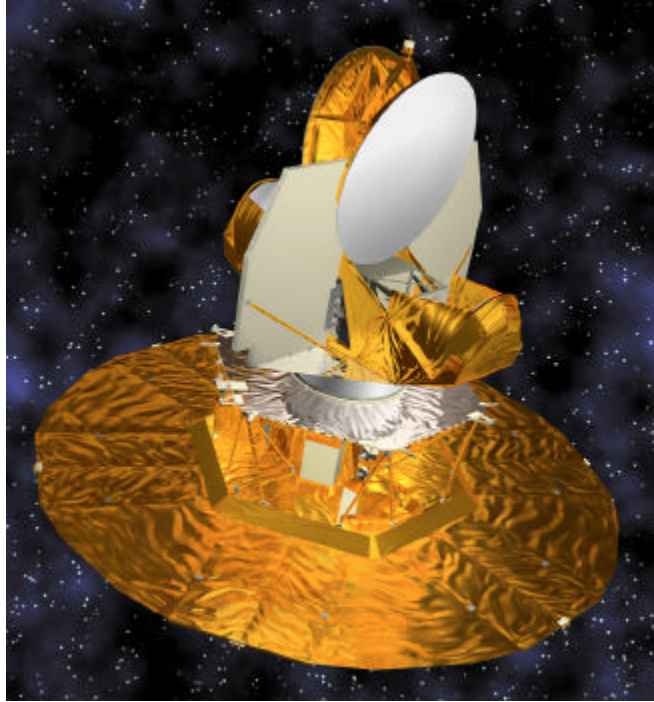
La comunicación con la Tierra se coordina mediante el Experiment Operations Facility (EOF) en el Goddard Space Flight Center (GSFC) de la NASA y el seguimiento se hace por medio de las antenas Deep-Space Network (DSN)³. A pesar de lo dicho anteriormente, durante dos meses al año la DSN tiene contacto con el SOHO las 24 horas del día, para transmitir datos de heliosismología.

El WMAP:

En este momento también se está utilizando uno de los puntos de Lagrange para el estacionamiento de satélites o telescopios, este es el punto L2. Allí se encuentra la WMAP, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. El L2 es un punto idóneo para la localización de este telescopio ya que, al estar situado detrás de la Tierra y en la línea que une al Sol con la Tierra, no le da la luz solar, y por lo tanto tiene una mejor vista de todo el universo.

Al estar situado en el punto de Lagrange L2, que no es de los estables, gira alrededor de ese punto y de vez en cuando tiene que corregir su posición para no salirse de esa órbita. A pesar de todo, desde allí tiene la capacidad de observar cualquier rincón del espacio profundo.

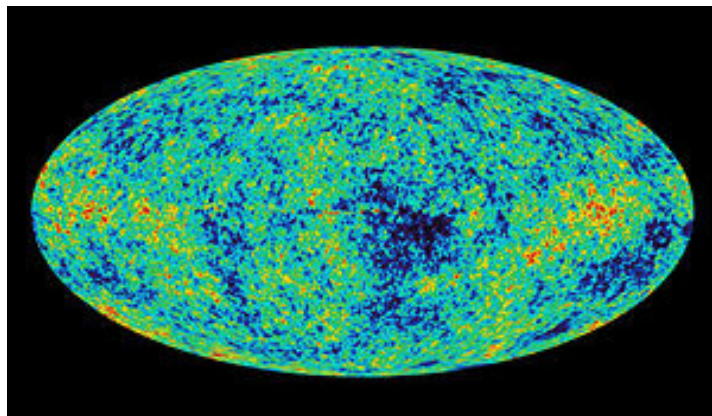
³ SOHO, Descripción de la misión
http://www.upv.es/satelite/trabajos/Grupo2_99.00/misiones/soho/soho.html



Observatorio WMAP (foto tomada de http://map.gsfc.nasa.gov/m_or/m_or3.html)

El objetivo de la WMAP es comprobar las teorías sobre el origen y evolución del universo. Para ello mide las diferencias de temperatura que se observan en la radiación del fondo cósmico de microondas, remanente del Big Bang.

Los resultados de las observaciones de este telescopio nos han proporcionado gran cantidad de información acerca del universo. En especial, existe una imagen en la que mejor se muestra la radiación de fondo de todo el cielo.



Radiación de fondo del cielo (http://es.wikipedia.org/wiki/WMAP#Descubrimientos_del_WMAP).

Entre otras deducciones que hemos podido hacer gracias a los datos que hemos obtenido del WMAP es que el universo se expandirá infinitamente y que está curvado en forma de cono.

En definitiva, gracias al WMAP hemos obtenido muchísima información, debido principalmente a la precisión en la toma de los datos y a su posición en el punto de Lagrange.

Futuro

En L3:

En el punto L3 no se encuentra ningún satélite artificial, y es muy poco probable que algún día vaya a haber uno allí situado. El punto L3 está detrás del Sol en la línea que une la estrella con nuestro planeta.

La colocación de un satélite en ese punto sería de gran utilidad para tener una constante visión del espacio, desde el punto L1 y desde el L3. Sin embargo, es improbable que vaya a haber un satélite en ese punto ya que la comunicación con la tierra sería una cosa casi imposible, debido a la distancia que tendrían que recorrer las ondas en el espacio, y principalmente al efecto pantalla que hace el Sol. Para que la señal llegara necesitaríamos colocar unos satélites a los lados de nuestra estrella para que ellos rebotaran la información recogida por el satélite situado en L3.

Como se ve esto sería una misión muy complicada teniendo que hacer muchos cálculos para que las ondas llegaran intactas hasta la Tierra. Por eso mismo, la posibilidad de que alguna vez vaya a haber una misión para colocar allí un telescopio o un satélite es remota.

En L4 y L5:

En los puntos L4 y L5 tampoco hay ningún satélite creado por el hombre, aunque, al contrario que con el punto L3, aquí si es posible que se vaya a lanzar alguna nave. A pesar de todo, todavía no hay ningún plan para el desarrollo de una misión en estos puntos, cosa que a mi parecer en este sentido la NASA y la ESA se equivocan al no utilizarlos.

Como ya he dicho, los puntos L4 y L5 son muy estables y por lo tanto una nave allí situada no necesitaría ajustarse en la órbita correcta al cabo de un tiempo, como pasa con el SOHO, por lo podría estar en funcionamiento durante muchísimo tiempo sin que el combustible constituya un problema.

Ese sería un lugar idóneo para la colocación de, por ejemplo, un satélite para observar planetas, o simplemente para estudiar sobre asteroides. Pero supongo que la distancia es mucho mayor que la que hay con L1 y L2 y por eso será más difícil. Ahora bien, podría haber problemas colocando la nave en estos puntos debido al gran número de asteroides y rocas que se encuentran en los alrededores de L4 y L5. Además, posiblemente habrá muchos más problemas de los que desconozco, debido a las limitaciones en las que me encuentro por ser tan sólo un aficionado a la astronomía y no un gran ingeniero como lo son los que trabajan en la NASA y la ESA, y que provocan que la colocación de un satélite en esos puntos sea muy difícil.

3 - CONCLUSIÓN:

Para mí muchas de estas cosas que ocurren en el espacio me parecían ciencia ficción, en el sentido de que muchas veces yo pensaba que el universo estaba formado simplemente por puntos luminosos, estrellas, planetas y cuerpos flotantes. En la medida que me he ido metiendo en temas de astronomía me sorprende toda la cantidad de estudios que hay hechos acerca de estos cuerpos y su comportamiento en el espacio.

Además, no deja de sorprenderme que una persona en el siglo XVIII, sin apenas medios para observar y estudiar el espacio, haya llegado a esas conclusiones tan acertadas. Creo que en la enseñanza de las ciencias tendrían que hablarnos más sobre estos personajes que han aportado tanto y tan brillantemente al conocimiento de la ciencia.

Por último, las matemáticas siempre me han parecido muy abstractas, a veces me costaba ver su utilidad. El tema tratado en este trabajo es un ejemplo de cómo las matemáticas son una herramienta necesaria para todo tipo de estudios científicos: físicos, astrónomos, ingenieros, etc.

Gracias al estudio que he realizado sobre los puntos de Lagrange he conocido más acerca del funcionamiento del universo, en concreto me he dado cuenta de que en el espacio realmente existe la atracción entre los cuerpos, que no es un mero concepto que aprendíamos cuando éramos pequeños, y que eso se nota en muchos aspectos para mí desconocidos anteriormente.

Además, al buscar información sobre los objetos que se lanzan al espacio, tales como el SOHO o el WMAP, he conocido más sobre ellos y sobre la dificultad que tiene lanzar una nave al espacio, ya que hay que hacer muchísimos cálculos complicadísimos para que permanezca en el lugar deseado durante el tiempo deseado.

4 - BIBLIOGRAFÍA:

El Problema de los Tres Cuerpos y los Asteroides Troyanos, Trabajo realizado por Carlos S. CHINEA (<http://personales.ya.com/casanchi/ast/atroyanos.htm>).

Asteroides, tipos, descubrimientos, (<http://www.mallorcaweb.net/masm/Aster.htm>).

Asteroides troyanos, (<http://axxon.com.ar/c-Zapping0089.htm>).

Lagrange y los asteroides troyanos, (<http://www.inaoep.mx/~rincon/troyanos.html>).

Los troyanos, (<http://www.astrogea.org/asteroides/troyanos.htm>).

Misiones solares, (<http://www.windows.ucar.edu/tour/link=/sun/mission.sp.html>).

Los Cinco Puntos de Lagrange,
(<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali/primeroa/lagrange/puntos.htm>).

Trabajo realizado por Jacobo Cruces Colado, José Carlos Canalda, 19 de octubre de 1999, Sitio de Ciencia-Ficción, (<http://www.ciencia-ficcion.com/glosario/p/puntlagr.htm>).

Página del SOHO, (<http://sohowww.estec.esa.nl>)

Trabajo en inglés realizado por Neil J. Cornish con la aportación de Jeremy Goodman, tomado de Astroseti.org, (<http://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>)

SOHO, Descripción de la misión
(http://www.upv.es/satelite/trabajos/Grupo2_99.00/misiones/soho/soho.html)

Nº PALABRAS: 3.665