BACHILLERATO INTERNACIONAL
Colegio Gaztelueta

Monografía: Matemáticas

Aplicación de la ley de Snell en el diseño teórico de un espejo

Borja Garrastachu

Resumen

La monografía que aquí resumimos se sirve de propiedades de las curvas cónicas para desarrollar una investigación en la que hallaremos la forma de los espejos a partir de un rayo de luz. Estos espejos resultarán tener la forma de las diferentes curvas cónicas llegando de esta manera a una sorpréndete conclusión. Por tanto el problema de investigación como tal sería ¿Cual es la forma de un espejo si un rayo de luz que sale de un punto fijo llamado foco al reflejarse verifica una determinada condición de salida?

El alcance de esta investigación sería en dos dimensiones la parábola la elipse la circunferencia y la recta. Utilizaremos los vectores tanto incidentes como emergentes.

Índice:

1. Introducción

El tema de la investigación es interesante y digno de estudio porque en primer lugar tiene muchas aplicaciones al vida real como pueden ser los telescopios Newtonianos las antenas parabólicas un tipo determinado de focos en los coches cocinas solares etc… A parte de esto en cuanto a las matemáticas se refiere se da un desarrollo muy vistoso debido a que a partir de dos vectores y un punto hallamos la forma del espejo. Además para resolver estos problemas se utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias estudiadas previamente en la asignatura de matemáticas del BI. También resulta interesante puesto que se juega con ciertas propiedades de las curvas cónicas[2].

La pregunta a resolver sería la siguiente:

¿Cual es la forma de un espejo si un rayo de luz que sale de un punto fijo llamado foco al reflejarse verifica una determinada condición de salida?

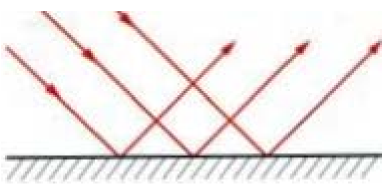
La monografía se puede situar en un contexto de ecuaciones diferenciales que basándose en un principio físico[3] hallan una ecuación que es la solución del problema. Para ello parte de un punto de donde sale el rayo y una dirección de salida que o bien nos la dan o bien la tenemos que hallar conociendo un punto al que todos los rayos van. De tal modo la investigación se diversifica en cuatro casos:

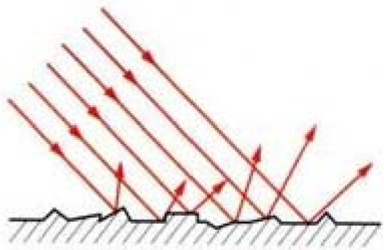
) Conocemos el foco[4] y una dirección de emergencia [5] del rayo.
2) Se conoce el foco y el punto receptor[6] y ambos coinciden.
3) Conocemos el foco y el receptor que en este caso es móvil no está fijo.
4) Se conoce el foco y el receptor.

En todos ellos la ecuación resultante será la forma del espejo.

El tema ha sido delimitado a las dos dimensiones debido a la dificultad de hacerlo en tres dimensiones pero ello no implica que las afirmaciones a las que llegamos no sean ciertas. A parte varias de estas soluciones son figuras de revolución es decir que son completamente aplicables a las tres dimensiones las otras al hacer una sección a la figura en 3D se cumplen igualmente. Otra cuestión que se ha tenido que tener en cuenta es que el aire produce una pequeña perturbación en el ángulo de emergencia por lo tanto el problema se enunciará siempre en una situación teórica de vacío de tal modo que esta pequeña perturbación se despreciará.

La superficie del espejo para que se cumpla deberá de ser pulida es decir sin rugosidades que alteren significativamente la reflexión del rayo.


Superficie pulida


Superficie rugosa

Véase aplicación a la vida real.
[2] En la elipse foco y receptor son recíprocos en la parábola la dirección de salida es constante en la circunferencia el foco y el receptor son coincidentes.
[3] El principio físico es tanto la ª como la 2ª Ley de Snell de la reflexión se explicara mas adelante.
[4] Lugar de donde sale el rayo
[5] Dirección de salida una vez que el rayo ha sido reflejado.
[6] Lugar a donde todos los rayos reflejados van.

Como consecuencia de los razonamientos matemáticos que se desarrollarán propiamente en la monografía la forma del espejo será la ecuación de:

) En el primer caso la de una parábola.
2) En el segundo caso la ecuación de una circunferencia.
3) En el tercer caso la de una recta.
4) En el cuarto caso la ecuación de una elipse.

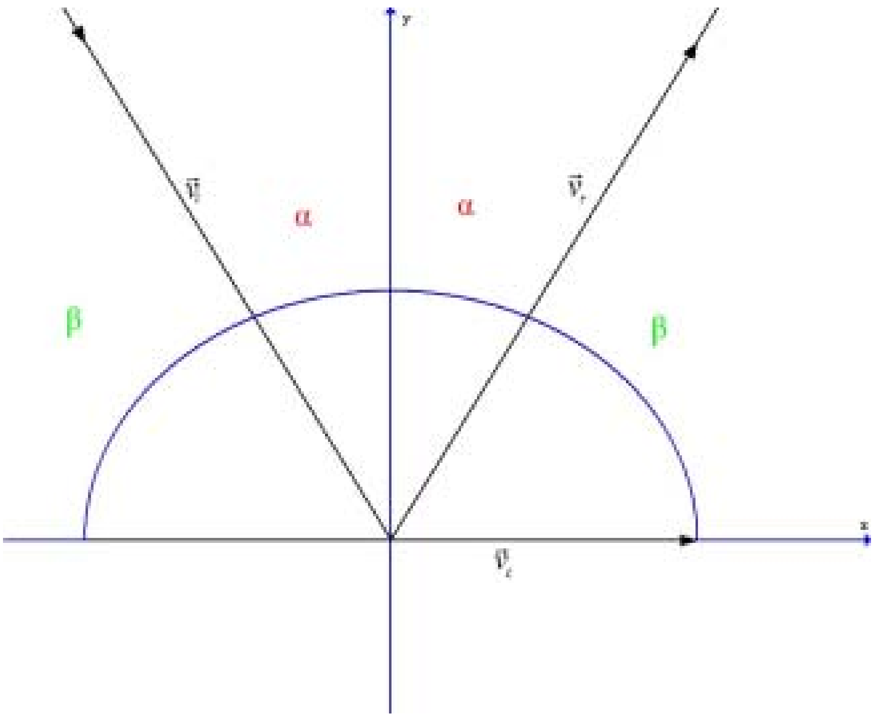
2. Cuerpo/Desarrollo: Planteamiento general del problema

La investigación se basa en el principio de Snell que dice que en condiciones teóricas de vacio el ángulo α formado por el rayo incidente y la perpendicular de la recta tangente en ese punto es el mismo que el formado por esta misma perpendicular y el rayo reflejado[7].

Teniendo en cuenta sus ángulos complementarios también se puede enunciar de la siguiente manera que el ángulo β entre el rayo incidente y la superficie donde se refleja (recta tangente en ese punto) es el mismo que el ángulo del rayo reflejado con la superficie[8]. Utilizaremos esta última propiedad puesto que nos fijaremos en el ángulo formado por el rayo incidente y la tangente y por otro lado en el formado por el rayo reflejado y la tangente.

Denominaremos para todo los casos $\vec{v}_i$ como el vector cuya dirección es la del rayo incidente $\vec{v}_t$ como el vector cuya dirección es la de la recta tangente en ese punto y por último $\vec{v}_r$ como el vector cuya dirección es la del rayo reflejado.

Para todos los casos utilizaremos el principio de reflexión ya mencionado que se podría escribir como áng($\vec{v}_i$ $\vec{v}_t$)= áng($\vec{v}_r$ $\vec{v}_t$) o por tanto se verifica $\frac{\vec{v}_i\vec{v}_t}{|\vec{v}_i||\vec{v}_t|}=\frac{\vec{v}_r\vec{v}_t}{|\vec{v}_r||\vec{v}_t|}$



Grafica

---

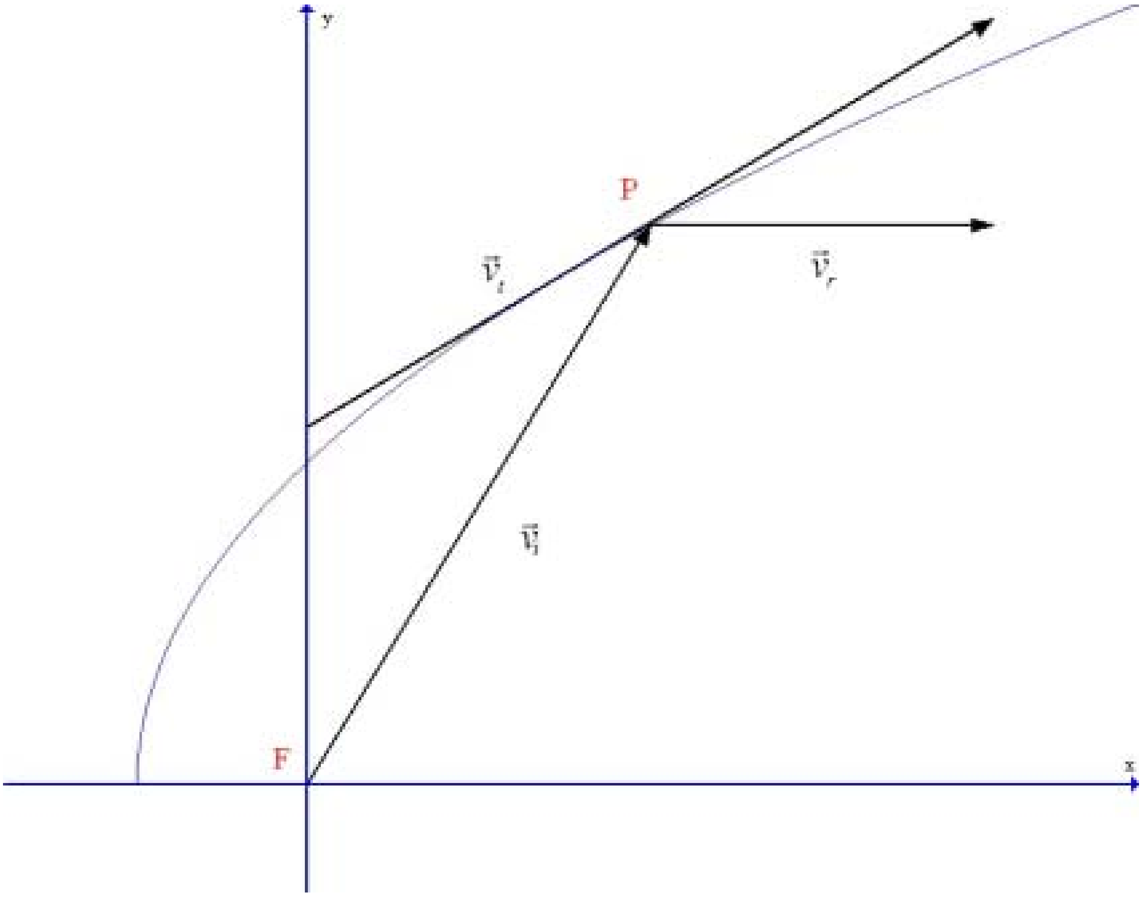
7 Véase gráfica
8 Véase gráfica

Dividiremos la investigación en cuatro casos en todos ellos F significará foco y en el caso de que hubiera un punto receptor se llamaría R.

2. → ª caso: Espejo parabólico.

Al reflejarse el rayo en cualquier punto del espejo la dirección de salida es constante. Sin pérdida de generalidad pongamos por caso que dicha dirección viene dada por el vector (0).

Demostraremos que en la hipótesis anterior la forma del espejo es la de una parábola.



Para ello pondremos el foco en el origen de coordenadas y para todo P utilizaremos $\vec{v}_i$ de dirección (x y) puesto que se debe de cumplir para cualquier punto de la parábola. (y'(x)) será la dirección de la recta tangente $\vec{v}_t$. Por último (0) será la dirección de salida del rayo $\vec{v}_r$.

Aplicando la ley de Snell por la cual el ángulo de reflexión y refracción es el mismo se tendría que el ángulo del vector de incidencia $\vec{v}_i$= (x y) con la recta tangente cuyo vector es $\vec{v}_t$ =(y') es igual al formado entre el vector del rayo reflejado $\vec{v}_r$ =(0):

$$\frac{\vec{v}_i \vec{v}_t}{|\vec{v}_i||\vec{v}_t|} = \frac{\vec{v}_r \vec{v}_t}{|\vec{v}_r||\vec{v}_t|} \qquad \text{Es decir} \qquad \frac{(x\ \ y)(\ \ y')}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\ \ +(y')^2}} = \frac{}{\sqrt{\ \ +(y')^2}}$$

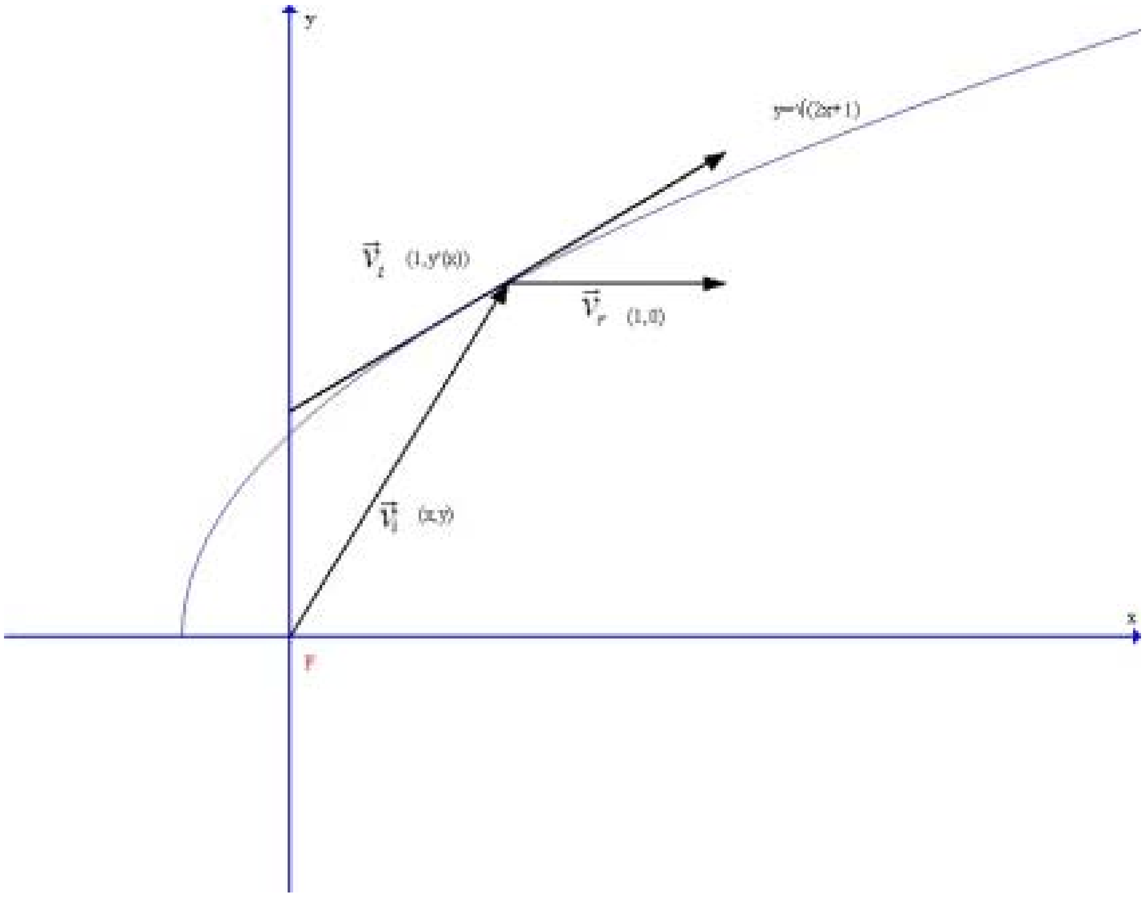
$\boxed{x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2}}$ que es una ecuación diferencial homogénea con solución la función $y = f(x)$.

Esta ecuación al ser homogénea se puede resolver haciendo el cambio de variable $u^2 = x^2 + y^2$.

Derivamos $2uu' = 2x + 2yy'$ $\quad uu' = x + yy'$
y por tanto la ecuación queda
$uu' = \sqrt{u^2} \quad uu' = u \quad u' =$
de tal manera que sabemos que la derivada de u ósea se u' es por tanto solo nos queda integrar para saber a que es igual u

$\int u'\,du = u \qquad \int dx = x + c$
Por tanto u=x+c y deshaciendo el cambio de variable
$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c \quad x^2 + y^2 = (x + c)^2 \quad x^2 + y^2 = x^2 + c^2 + 2xc$.
$\boxed{y^2 = 2xc + c^2}$ que es la ecuación de infinitas parábolas con eje de simetría y=0 y vértice en $0 = 2xc + c^2 \qquad x = -\dfrac{c}{2}$ lo que nos indica que el vértice esta en $\left(-\dfrac{c}{2}\ 0\right)$.

Visualizaremos algún ejemplo para verificar la tesis ya dada. Elegiré arbitrariamente un valor para c por ejemplo c= . De tal manera que la ecuación de la parábola será
$y^2 = 2x + \qquad y = \sqrt{2x +}$



2.2 →2ª caso: Espejo circular

Vamos a suponer que el foco y el receptor son el mismo punto.

Para facilitar el problema colocaremos el foco coincidente con R en el origen de coordenadas.

El vector del rayo incidente será $\vec{v}_i$= (x y) puesto que debe ser para cualquier punto.

La dirección de la recta tangente en ese punto vendrá dada por el vector $\vec{v}_t$ =(y') que es la derivada en ese punto.

Por último el vector del rayo reflejado será $\vec{v}_r$ = (-x -y) puesto que es el mismo que el vector incidente pero en dirección contraria.

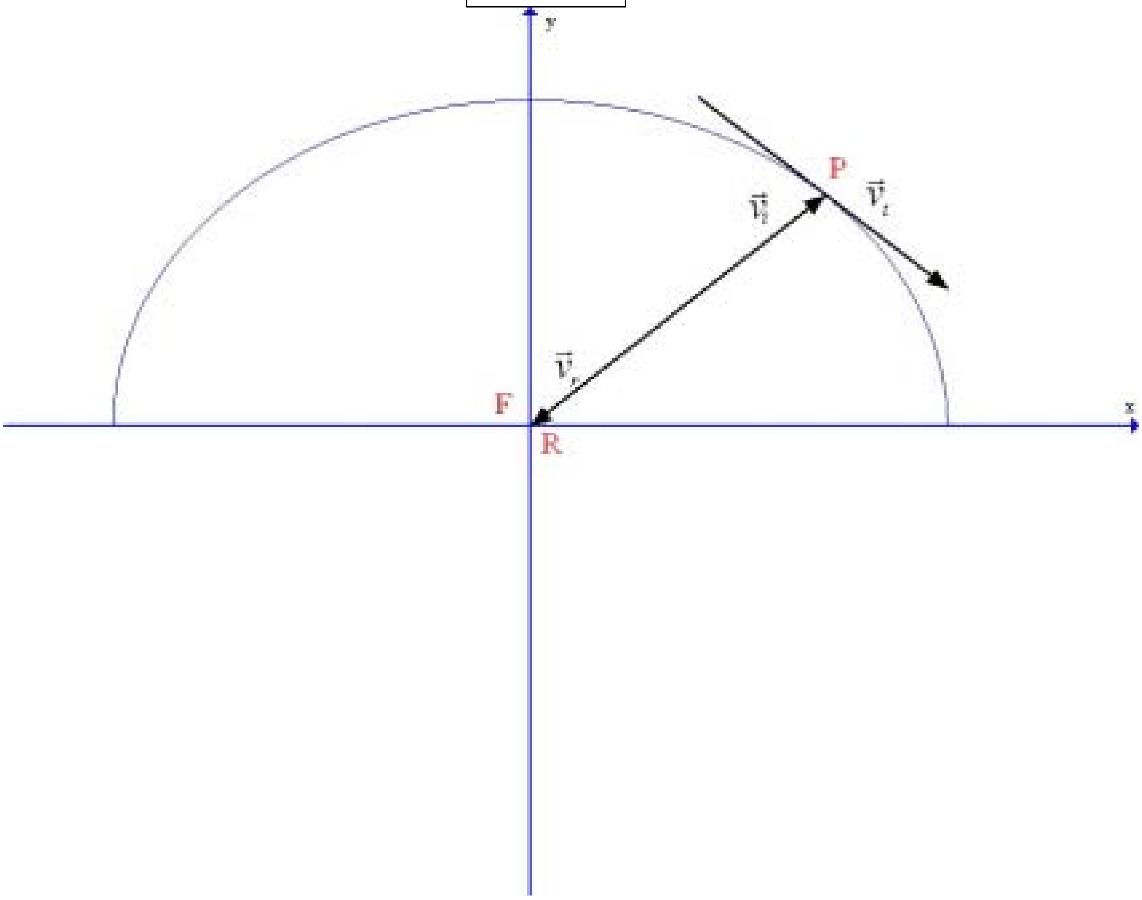
Por la ley de Snell igualamos ángulos áng($\vec{v}_i$ $\vec{v}_t$)= áng($\vec{v}_r$ $\vec{v}_t$) o lo que es lo mismo

$$\frac{\vec{v}_i\vec{v}_t}{|\vec{v}_i||\vec{v}_t|} = \frac{\vec{v}_r\vec{v}_t}{|\vec{v}_r||\vec{v}_t|} \qquad \frac{(x\ \ y)(\ \ y')}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\ \ +(y')^2}} = \frac{(-x-y)(\ \ y')}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\ \ +(y')^2}}$$

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\ \ +(y')^2}} = \frac{-x-yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\ \ +(y')^2}} \qquad x+yy' = -x-yy'$$

$\boxed{2x+2yy'=0}$ Que es una ecuación diferencial que al integrarla nos da la ecuación de infinitas circunferencias de radio $\sqrt{k}$

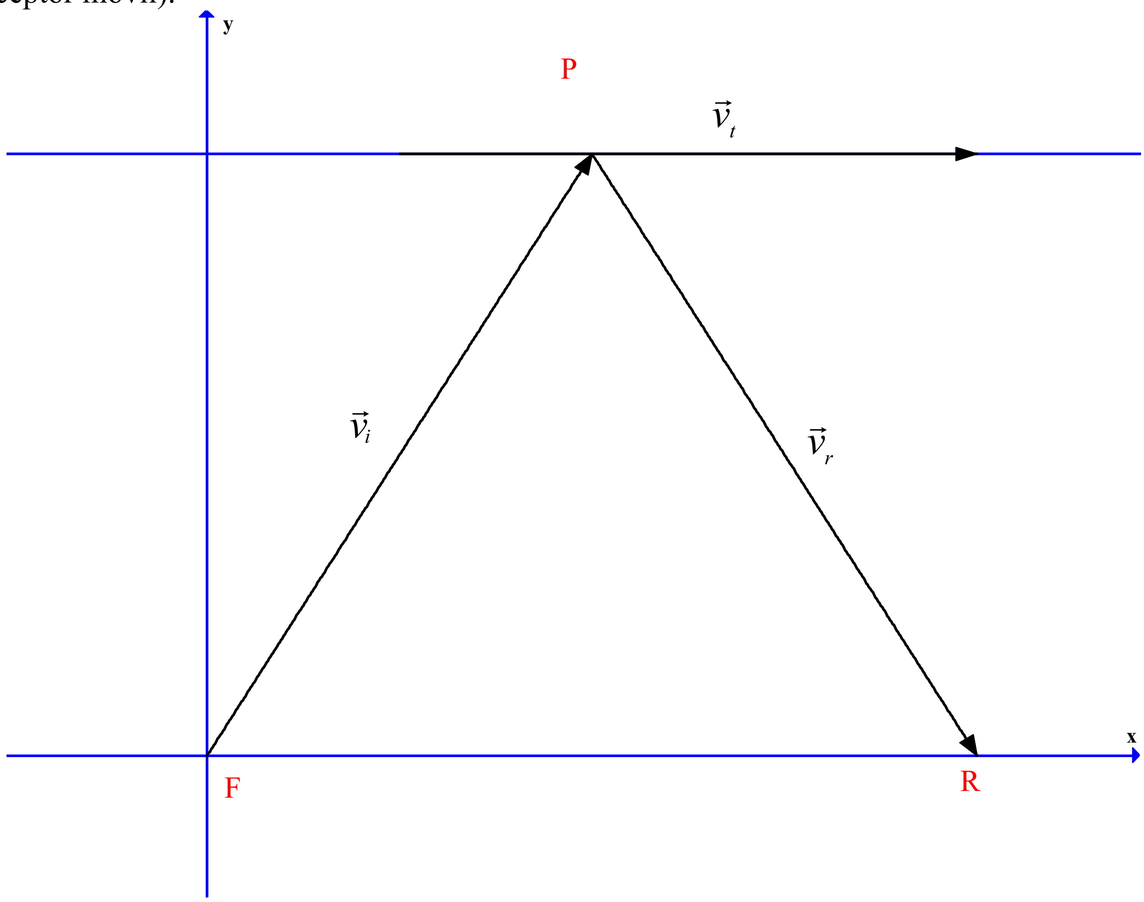
$$\boxed{x^2+y^2=k}$$



La forma del espejo es circular

2.3 →3ª caso: Espejo plano

Para empezar conocemos el foco y el receptor pero este último al contrario que en el caso anterior no esta en un sitio fijo sino que se va moviendo horizontalmente (receptor móvil).



Para hacer mas fácil el problema colocaremos el foco en el origen de coordenadas el receptor es el punto de coordenadas (2x 0).

El vector del rayo incidente será $\vec{v}_i$= (x y) puesto que tiene que servir para cualquier punto.

La dirección de la recta tangente la hayamos haciendo la derivada del vector incidente en ese punto ósea sé $\vec{v}_t$=(y').

La dirección del rayo reflejado vendrá dada por el vector $\vec{v}_r$= (x -y) puesto que es un vector perpendicular al vector incidente.

Una vez mas aplicando la ley de Snell e igualando ángulos

 áng($\vec{v}_i$ $\vec{v}_t$)= áng($\vec{v}_r$ $\vec{v}_t$) o lo que es lo mismo $\frac{\vec{v}_i\vec{v}_t}{|\vec{v}_i||\vec{v}_t|} = \frac{\vec{v}_r\vec{v}_t}{|\vec{v}_r||\vec{v}_t|}$

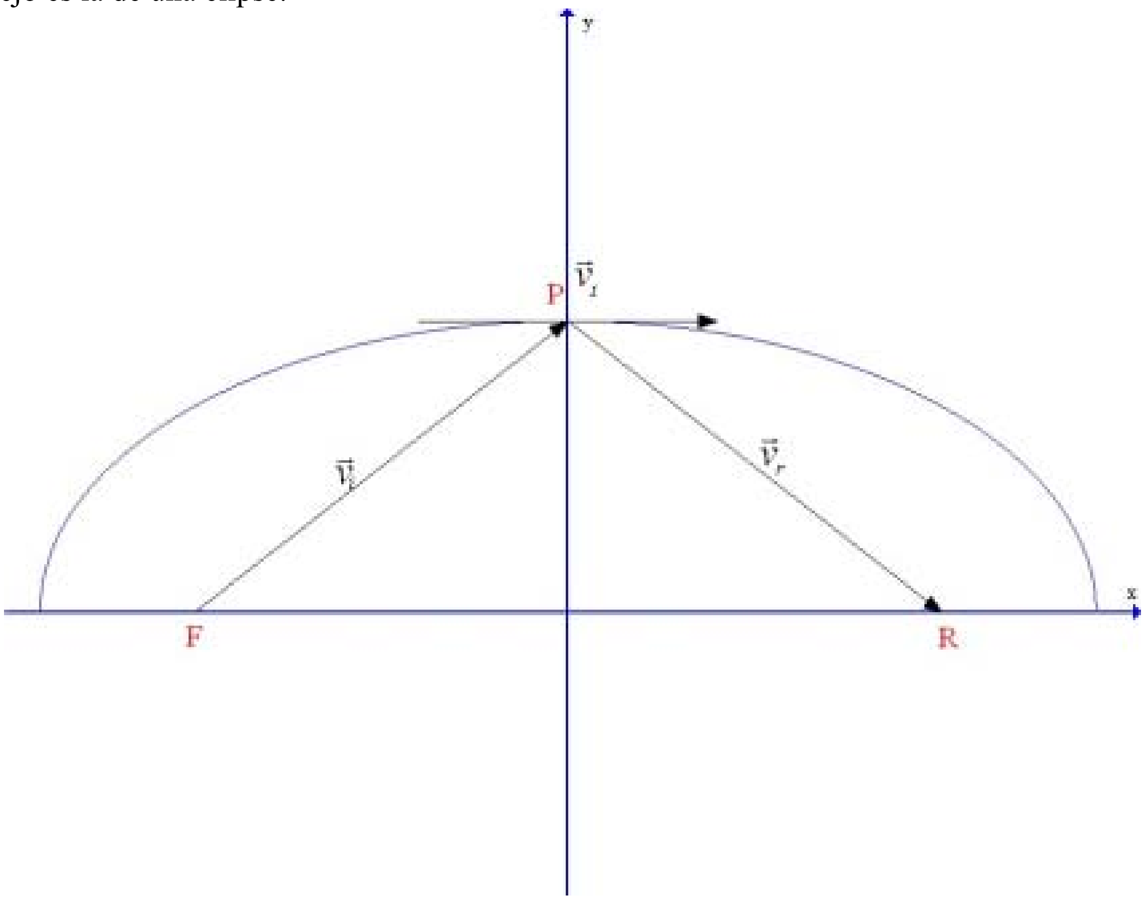
$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\quad +(y')^2}} = \frac{x-yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\quad +(y')^2}} \qquad x+yy' = x-yy'$$

$\boxed{2yy'=0}$ Integrando la ecuación $y^2 = k$ $\boxed{y=\pm k}$ la forma del espejo es la de una recta (un espejo plano)

2.4 →4ª caso: Espejo elíptico.

De este caso conocemos el foco y el receptor pero a diferencia de los anteriores el receptor esta en un punto fijo y no es coincidente con el foco.

A partir de la hipótesis ya dicha deduciremos matemáticamente que la forma del espejo es la de una elipse.



Ubicaremos el foco en el punto F(- 0) y el sumidero en el punto S(0).

La dirección del rayo incidente es la del vector que va del foco a cualquier punto P(x y) $\vec{v}_i = \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF} = (x \ \ y) - (- \ \ 0) = (x + \ \ y)$.

La dirección de la recta tangente será la del vector que es la derivada de la dirección incidente en ese punto $\vec{v}_t = (\ \ y')$.

La dirección del rayo reflejado es la del vector

$\vec{v}_r = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (\ \ 0) - (x \ \ y) = (\ - x - y)$.

Siguiendo el mismo método aplicamos la ley de Snell igualando ángulos ång($\vec{v}_i$ $\vec{v}_t$)= ång($\vec{v}_r$ $\vec{v}_t$) o lo que es lo mismo

$$\frac{\vec{v}_i \vec{v}_t}{|\vec{v}_i||\vec{v}_t|} = \frac{\vec{v}_r \vec{v}_t}{|\vec{v}_r||\vec{v}_t|} \qquad \frac{x + \ + yy'}{\sqrt{(x + \ )^2 + y^2}\sqrt{\ + (y')^2}} = \frac{- x - yy'}{\sqrt{(\ - x)^2 + y^2}\sqrt{\ + (y')^2}}$$

$$\frac{x + \quad + yy'}{\sqrt{(x + \quad)^2 + y^2}} = \frac{\quad - x - yy'}{\sqrt{(\quad - x)^2 + y^2}}$$ Ecuación diferencial

Vamos a demostrar que la elipse de ecuación

$d(P\ F) + d(P\ S) = \sqrt{(x + \quad)^2 + y^2} + \sqrt{(\quad - x)^2 + y^2} = C$

Es solución de la ecuación diferencial siendo $C > 2$.

$\sqrt{(\quad - x)^2 + y^2} = C - \sqrt{(x + \quad)^2 + y^2}$

Si lo sustituimos en la ecuación de arriba

$$\frac{x + \quad + yy'}{\sqrt{(x + \quad)^2 + y^2}} = \frac{\quad - x - yy'}{C - \sqrt{(x + \quad)^2 + y^2}}$$ para resolver esta ecuación diferencial tenemos que hacer un cambio de variable $(x + \quad)^2 + y^2 = u^2$ que derivándolo nos da

$2(x + \quad) + 2yy' = 2uu' \qquad \quad + x + yy' = uu'$

o también nos puede ser útil $x + yy' = uu' - \quad$.

Hacemos uso del cambio de variable en la ecuación principal quedándonos lo siguiente

$$\frac{uu'}{\sqrt{u^2}} = \frac{\quad - (uu' - \quad)}{C - \sqrt{u^2}} \qquad \frac{uu'}{u} = \frac{2 - uu'}{2\sqrt{2} - u} \qquad u' = \frac{2 - uu'}{C - u}$$

$$(C - u)u' = 2 - uu' \qquad (C - u)u' + uu' = 2 \qquad (C - u + u)u' = 2$$

$Cu' = 2 \qquad u' = \frac{2}{C}$ integramos y nos da $u = \frac{2}{C}x + k$

deshaciendo el cambio de variable $(x + \quad)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{C}x + k\right)^2$

$$x^2 + \quad + 2x + y^2 = \frac{4}{C^2}x^2 + k^2 + \frac{4k}{C}x$$

$\boxed{x^2\left(\quad - \frac{4}{C^2}\right) + y^2 + x\left(2 - \frac{4k}{C}\right) = k^2 - \quad}$ Que es la ecuación de infinitas elipses de ahí deducimos que tanto el foco como el receptor son recíprocos es decir pueden intercambiar sus posiciones entre sí.

3. Conclusión

Ayudándonos de espejos que reflejan rayos (de los que sacamos los vectores) el estudio de las cónicas y de sus propiedades nos lleva a poder probarlas matemáticamente. Obteniendo así las ecuaciones de infinitas parábola $y^2 = 2xc + c^2$ circunferencias $x^2 + y^2 = k$ elipse $x^2\left(\quad - \frac{4}{C^2}\right) + y^2 + x\left(2 - \frac{4k}{C}\right) = k^2 - \quad$. Por otro lado incluso probamos la ecuación de infinitas rectas $y = \pm k$.

De este modo dejamos abierto el problema de la hipérbole que tiene unas propiedades interesantes y que seguramente se podría aplicar al diseño de espejo.

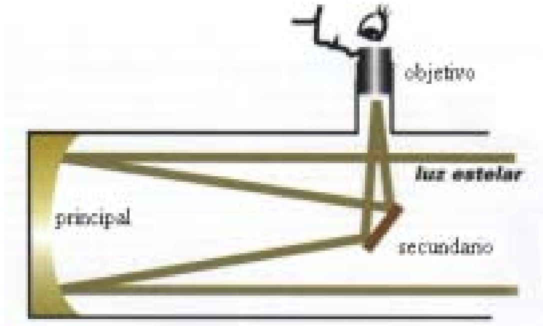
Las consecuencias que podemos sacar de esta conclusión serían las diferentes aplicaciones a la vida real. De las muchas aplicaciones pondré tres ejemplos: el telescopio Newtoniano la cocina solar y las antenas parabólicas.

4. Aplicaciones a la vida real

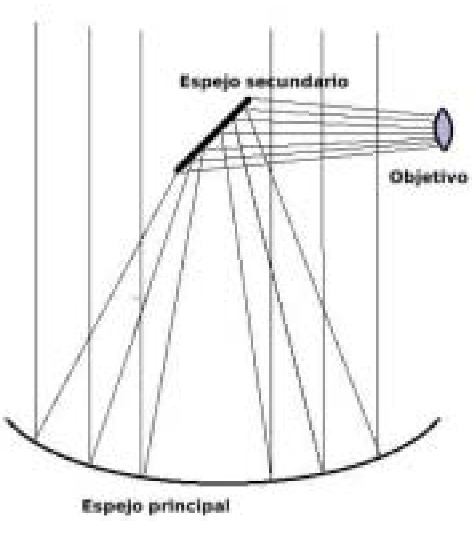
Telescopios Newtonianos


[9]

En primer lugar para captar la imagen que penetra en el telescopio y hacerla llegar a nuestros ojos se utilizan dos tipos de espejos un espejo principal parabólico y otro secundario plano. En el espejo principal ocurre que entran con direcciones paralelas y el espejo dirige estos rayos al espejo secundario. Este a su vez dirige la imagen al objetivo por donde miramos. Quizá se vea mas claro con un dibujo.



[0]



---

[9]http://www.telescopioschile.cl/media/catalog/product/cache/ /image/5e063 9eda06 f020e43594a9c230972d/3/ /3 062_c8ngt_large_2_ .gif

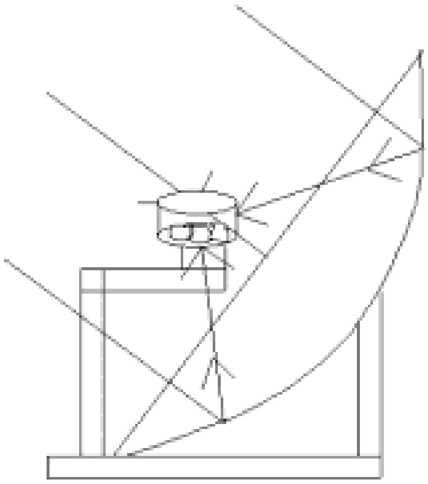
[0] http://www.cienciahoy.org.ar/hoy44/images/teles0 .jpg

http://www.ciberdroide.com/wordpress/wp content/uploads/telescopio_newton .jpg

Cocina solar:  [2]

Es muy parecido tanto al caso anterior como a la antena parabólica puesto que a partir de rayos en este caso solares se proyectan en un punto mediante un espejo parabólico. Al concentrarse todo el calor en ese punto donde se encuentra la comida esta alcanza la temperatura suficiente para ser cocinada.

Con este dibujo se verá mas claro.

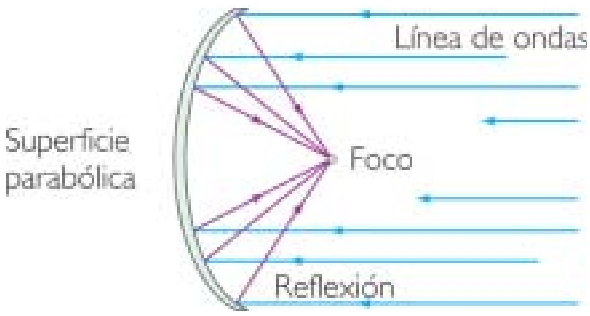


[3]

Antenas Parabólicas:  [4]

Al igual que el caso anterior la superficie del espejo es parabólica y las líneas de ondas son paralelas entre si. La superficie del espejo al reflejarlas las manda al foco. En ese lugar se recogen las ondas para mas tarde ser procesadas.

[2] http://bejomi .files.wordpress.com/2009/03/cocina-solar.jpg
[3] http://www.ub.es/geocrit/b3w-376-2.gif
[4] http://www.global-b2b-network.com/direct/dbimage/50 6 858/Antenna.jpg



[5]

5. Referencias/Bibliografía

Esta monografía se ha inspirado en el ejercicio que aparece en el libro *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* A.Kiseliov M.Krasnov G.Makarenko. Editorial Mir impreso en la URSS y traducido del ruso por Emiliano Aparicio Bernardo candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas en 979.

Debajo de cada imagen que he sacado de Internet he puesto con una nota a pie de página la Web de la que la he sacado aun así las vuelvo a poner aquí.

http://www.ciberdroide.com/wordpress/wp-content/uploads/telescopio_newton .jpg

http://www.cienciahoy.org.ar/hoy44/images/teles0 .jpg

http://www.telescopioschile.cl/media/catalog/product/cache/ /image/5e063 9eda06f 020e43594a9c230972d/3/ /3 062_c8ngt_large_2_ .gif

http://www.ub.es/geocrit/b3w-376-2.gif

http://bejomi .files.wordpress.com/2009/03/cocina-solar.jpg

http://bo.kalipedia.com/kalipediamedia/ingenieria/media/200708/2 /informatica/200 7082 klpinginf_ 9.Ges.SCO.png

http://www.global-b2b-network.com/direct/dbimage/50 6 858/Antenna.jpg

Aparte para resolver ciertas dudas de las curvas cónicas he utilizado el libro *Dibujo Técnico 2* Jesús Álvarez José Luis Casado María Dolores Gómez. Editorial SM impreso en España.

Por otro lado también me ayudé del libro *Matemáticas 2* Jose Ramón Vizmanos Joaquín Hernández Fernando Alcaide. Editorial SM impreso en España.

[5] http://bo.kalipedia.com/kalipediamedia/ingenieria/media/200708/2 /informatica/2 007082 klpinginf_ 9.Ges.SCO.png